جامعة البعث — امتحان هندسة تفاضلية — اسم الطالب [redacted]

كلية العلوم — سنة رابعة رياضيات (تحليل) — الدرجة : 100

قسم الرياضيات — الفصل الأول (٢٠١٧-٢٠١٨) — الفترة ١١- ١٢,٣٠

السؤال الأول : (45 درجة)

ليكن السطح المعين بالمعادلة : [illegible] والمطلوب :

١) تحقق من أن السطح نظامي ، ادرس طبيعة نقاطه وخطوطه الاعتيادية .

٢) حدد الخطوط المقاربة وخطوط التقوس والتقوسات الأساسية لهذا السطح

٣) انطلاقاً من أن معادلة التقوس الناظمي على سطح تأخذ الشكل $k_n = k(\xi,\eta) = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2}$

وبفرض (ξ,η) منحني أساسي على سطح ، أثبت أن معادلة التقوسات الأساسية تأخذ الشكل

$k^2(EG - F^2) - k(EN - 2FM + GL) + LN - M^2 = 0$

٤) ليكن المنحني [illegible] على السطح السابق،اثبت انه جيوديزي أوجد تقوسه والتفافه في نقطة ما منه

السؤال الثاني : (40 درجة)

١) بفرض أن النظام الإحداثي $(\bar{u},\bar{v})$ المعطى يرتبط بالنظام الاحداثي الديكارتي (u,v) بالعلاقة: [illegible] المركبات تتغير من النوع $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ والمطلوب:أوجد [illegible] (مركبات كريستوفل) ثم أوجد المشتقة موافق التغير [illegible]

٢) بفرض $(1,-2)$ [illegible] تنسوراً في النظام الاحداثي الديكارتي والمطلوب أوجد المركبة [illegible] في النظام الاحداثي المعطى $(\bar{u},\bar{v})$ السابق

السؤال الثالث (15 درجة)

عرف المنطوي التفاضلي ، وبين أن مجموعة جميع المصفوفات المربعة غير الشاذة من المرتبة n ، تمثل منطوياً تفاضلياً بعده n^2 .

مع تمنياتي بالنجاح — مدرس المقرر أ.د. محسن شيحة

حمص في ٢٠١٨/٢/١٥

الأجوبة النموذجية لمقرر هندسة تفاضلية سنة رابعة رياضيات (تكميلي) الفصل الأول (٢٠١٧-٢٠١٨)

الجواب الأول:

45

$r(u,v) = (-\operatorname{ch}u \sin v, \operatorname{ch}u \cos v, u)$

$r_u = (-\operatorname{sh}u \sin v, \operatorname{sh}u \cos v, 1)$, $r_v = (-\operatorname{ch}u \cos v, -\operatorname{ch}u \sin v, 0)$

$r_{uu} = (-\operatorname{ch}u \sin v, \operatorname{ch}u \cos v, 0)$, $r_{uv} = (-\operatorname{sh}u \cos v, -\operatorname{sh}u \sin v, 0)$

$r_{vv} = (\operatorname{ch}u \sin v, -\operatorname{ch}u \cos v, 0)$

$E = (r_u)^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 u = \operatorname{ch}^2 u$, $F = r_u \cdot r_v = 0$, $G = (r_v)^2 = \operatorname{ch}^2 u$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|} = \frac{1}{\operatorname{ch}u}(\sin v, -\cos v, \operatorname{sh}u)$$

$L = \vec{r_{uu}} \cdot \vec{n} = -1$, $M = \vec{r_{uv}} \cdot \vec{n} = 0$, $N = \vec{r_{vv}} \cdot \vec{n} = +1$

1) نلاحظ أن الدالة $r(u,v) \in C^\infty$ وأن $\vec{r_u} \times \vec{r_v} \neq 0$ لأي نقطة من نقاط السطح لذلك فهو نظامي.

بما أن $LN - M^2 = -1 < 0$ فإن نقاط السطح زائدية

وبما أن $M = F = 0$ فإن خطوط الإحداثية متعامدة

2) معادلة الخطوط المقاربة ومنه

$$II = 0 \Rightarrow -du^2 + dv^2 = 0 \Rightarrow du^2 = dv^2 \Rightarrow du = \mp dv$$

$$u = \mp(v + c)$$

خطوط التقوس هي حل المحدد

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ \operatorname{ch}^2 u & 0 & \operatorname{ch}^2 u \\ -1 & 0 & +1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{ch}^2 u\, du\, dv = 0$$

ومنه $du = 0$ or $dv = 0$ أي $u = v = c$

الخطوط الإحداثية هي خطوط التقوس

ولإيجاد التقوسات الأساسية: نلاحظ أن $M = F = 0$ ومنه

$$K_1 = \frac{L}{E} = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} , K_2 = \frac{N}{G} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}$$

3) من العلاقة المعطاة يمكننا إيجاد مطابقة بالنسبة لـ ξ, η وهي

$$(L - KE)\xi^2 + 2(M - KF)\xi\eta + (N - KG)\eta^2 = 0$$

بأخذ مشتقة هذه العلاقة بالنسبة لـ ξ و η باعتبار أن مشتق التقوس الأساسي وفق المنحى الأساسي يساوي الصفر نجد أنه

$$(L - KE)\xi + (M - KF)\eta = 0$$

وبمفاضلة المطابقة بالنسبة لـ η نجد:

$$(M - KF)\xi + (N - KG)\eta = 0$$

حيث K التقوس الأساسي وفق المنحى (ξ, η).

إن المعادلتين الأخيرتين جبريتان خطيتان بالنسبة لـ ξ, η وتملكان حلاً غير الصفري وهذا يعني أن محددهما معدوم أي:

$$\begin{vmatrix} L - KE & M - KF \\ M - KF & N - KG \end{vmatrix} = 0$$

بفك المحدد نحصل على المطلوب

$$K^2(EG - F^2) - K(EN - 2FM + GL) + LN - M^2 = 0$$

٤) لدينا $\vec{r'}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ ومنه $\vec{r''}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$ ، $\vec{r'''}(t) = (+\sin t, -\cos t, 0)$ ، $\vec{n} = (\sin t, -\cos t, 0)$ وبالتالي يأخذ المحدد

المنحني جيوديزي

$$(\vec{n}, \vec{r'}, \vec{r''}) = \begin{vmatrix} \sin t & -\cos t & 0 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow K_g = 0$$

نعوض بالمنحني الانحناء

لأن المنحني مستوي

$$K = \frac{|\vec{r'} \times \vec{r''}|}{|\vec{r'}|^3} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\right)^3} = 1 \,,\quad \tau = \frac{(r', r'', r''')}{|r' \times r''|^2} = 0$$

الجواب الثاني

$8 \times 5 = 40$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \bar{y} \\ 0 & \bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(\bar{y})^2 & \bar{x}\bar{y} \\ \bar{x}\bar{y} & (\bar{x})^2 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{2,12} = \frac{1}{2}(\partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12}) = \bar{x} \,,\quad \Gamma_{1,21} = \frac{1}{2}(\partial_1 g_{12} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{21}) = \bar{y}$$

$$g^{ij} = \frac{1}{(\bar{x})^2} \begin{pmatrix} \bar{x}^2 & -\bar{x}\bar{y} \\ -\bar{x}\bar{y} & 1+(\bar{y})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right) \\ -\frac{\bar{y}}{\bar{x}} & \frac{1+(\bar{y})^2}{\bar{x}^2} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^1_{21} = g^{1\alpha}\Gamma_{\alpha,21} = g^{11}\Gamma_{1,21} + g^{12}\Gamma_{2,21} = \bar{y} - \frac{\bar{y}}{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$$

$$\Gamma^2_{21} = g^{2\alpha}\Gamma_{\alpha,21} = g^{21}\Gamma_{1,21} + g^{22}\Gamma_{2,21} = -\frac{\bar{y}}{\bar{x}}(\bar{y}) + \left(\frac{1+\bar{y}^2}{\bar{x}^2}\right) \cdot \bar{x} = \frac{1}{\bar{x}}$$

$$\bar{T}_{1/2} = \partial_2 \bar{T}_1 - \bar{T}_\alpha \Gamma^\alpha_{21} = 0 - \bar{T}_1\Gamma^1_{21} - \bar{T}_2\Gamma^2_{21} = -\left(\bar{x} \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{\bar{x}}\right) = -\frac{1}{\bar{x}}$$

$$\bar{S}_1 = S_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + S_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot \bar{y} = 1 - 2\bar{y}$$

الجواب الثالث

5 درجات : المنطوي التفاضلي M^n هو فضاء تبولوجي مفصول يحقق ما يلي :

١) توجد في M^n مجموعة من الخرائط $A = \{(U_\alpha, X_\alpha), \alpha \in I\}$ بحيث

- من أجل أي $\alpha \in I$ فإن المجموعة $X_\alpha(U_\alpha)$ مفتوحة في $\mathbb{R}^n$ ، تسمى A أطلس على M^n .

- $M^n = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

٢) من أجل أي خارطتين (U, X) ، (V, Y) من أطلس A بحيث $U \cap V \neq \phi$ فإن التطبيق

$$Y \circ X^{-1} : X(U \cap V) \longrightarrow Y(U \cap V)$$

$$(x^1, \dots, x^n) \longrightarrow (y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, \dots, x^n))$$

تطبيق أملس أي

$$\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) \neq 0$$

٣) الأطلس A أعظمي على M^n (أي كل خارطة (W, Z) منسجمة مع A يجب أن تنتمي إلى A .

يتبع خلف الورقة $\longrightarrow$

نعرف $G = GL(n,R)$ مجموعة كل المصفوفات المربعة غير الشاذة من الشكل $n \times n$

ان G هي منطوي املس من الرتبة n^2.

ان G فضاء متري فصول حيث دالة المسافة المعرفة عليه :

$$d(A,B) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - b_{ij})^2}$$

حيث $A = (a_{ij})$ ، $B = (b_{ij})$ ،

لنفرض ان $A = (a_{ij}) \in G$ ، ولنعرف ϕ تطبيق بالشكل :

$$\phi : G \longrightarrow R^{n^2}$$
$$A \longrightarrow \phi(A) = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}) \in R^{n^2}.$$

نلاحظ ان الزوج المرتب (G, ϕ) هي خارطة احداثية مع G ، ومن اجل ذلك يكفي ان نثبت ان المجموعة $\phi(G)$ مجموعة مفتوحة في R^{n^2} (مع اعتبار ان ϕ تقابل)

لنعرف الدالة $\Delta : R^{n^2} \to R$ بالشكل :

$$\Delta(x_{11}, \dots, x_{nn}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} x_{1\sigma(1)} \cdots x_{2\sigma(2)} \cdots x_{n\sigma(n)}$$

حيث S_n مجموعة جميع التباديل لـ n دليل .

نلاحظ ان Δ تقابل مستمر وان $\Delta \circ \phi(A) = \det A$ لذلك فان ، $\phi(G) = \Delta^{-1}(R^{*})$ هي مجموعة مفتوحة (الصورة العكسية لمجموعة مفتوحة)

انتهت الاجوبة د. محسن [illegible]